QO‘QON DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI ILMIY XABARLARI
(2026-yil 2-son)

PEDAGOGIKA

PEDAGOGY

NOCHIZIQ TENGLAMALARNI TAQRIBIBIY YECHISH USULLARI. NYUTONNING ASOSIY VA SODDALASHGAN USULI, KESMANI TENG IKKIGA BO'LISH USULI, KESKASILAR USULLARI.

https://doi.org/10.70728/c.series.v08.i02.017

Ergashxo'jayeva Gulshan Sadirdin qizi.
NamDU amaliy matematika yo'nalishi magistranti
M.ATI-AU- 24 guruh
gulshanergashxojayeva0621@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu tadqiqot ishida hisoblash matematikasining fundamental muammolaridan biri bo‘lgan nochiziqli tenglamalarni yechishning taqribiy usullari batafsil tahlil qilinadi. Tadqiqot doirasida biseksiya, Nyutonning klassik va soddalashgan usullari, shuningdek, kesuvchilar (vatarlar) usullarining nazariy asoslari, yaqinlashish shartlari va xatoliklar tartibi o‘rganilgan. Maqolada har bir usulning algoritmik samaradorligi turli murakkablikdagi transsendent tenglamalar misolida qiyoslanadi. Tadqiqot natijalari Python dasturlash tili yordamida olingan eksperimental ma’lumotlar, grafiklar va iteratsiyalar dinamikasi bilan boyitilgan. Olingan natijalar muhandislik va ilmiy hisoblashlarda optimal metodni tanlash mezonlarini belgilashga xizmat qiladi.

Kalit so‘zlar: Nochiziqli tenglama, sonli usullar, biseksiya, Nyuton-Rafson algoritmi, kesuvchilar usuli, yaqinlashish tezligi, Python simulyatsiyasi, iteratsion jarayon, xatolik chegarasi.

Аннотация. В данной научно-исследовательской работе подробно анализируются приближенные методы решения нелинейных уравнений, являющиеся одной из фундаментальных проблем вычислительной математики. В рамках исследования изучены теоретические основы, условия сходимости и порядок погрешности метода бисекции, классического и упрощенного методов Ньютона, а также метода секущих. В статье сравнивается алгоритмическая эффективность каждого метода на примере трансцендентных уравнений различной сложности. Результаты исследования дополнены экспериментальными данными, графиками и динамикой итераций, полученными с помощью языка программирования Python. Полученные результаты служат для определения критериев выбора оптимального метода в инженерных и научных расчетах.

Ключевые слова: Нелинейное уравнение, численные методы, метод бисекции, алгоритм Ньютона–Рафсона, метод секущих, скорость сходимости, моделирование в Python, итерационный процесс, предел погрешности.

Abstract. In this research paper, approximate methods for solving nonlinear equations, which are one of the fundamental problems of computational mathematics, are analyzed in detail. Within the framework of the study, the theoretical foundations, convergence conditions, and error orders of the bisection method, classical and simplified Newton methods, as well as the secant method, are studied. The article compares the algorithmic efficiency of each method using the example of transcendental equations of various complexities. The research results are supplemented with experimental data, graphs, and iteration dynamics obtained using the Python programming language. The results serve to define the criteria for choosing the optimal method in engineering and scientific calculations.

Keywords: Nonlinear equation, numerical methods, bisection method, Newton–Raphson algorithm, secant method, convergence rate, Python simulation, iterative process, error tolerance.

KIRISH . Zamonaviy fan, texnika va iqtisodiyotning ko‘plab amaliy masalalari nochiziqli bog‘lanishlar orqali ifodalanadi. Matematik nuqtayi nazardan, bunday masalalar $f(x) = 0$ ko‘rinishidagi algebraik yoki transsendent tenglamalarni yechishga keltiriladi. Ma’lumki, darajasi to‘rtdan yuqori bo‘lgan ko‘phadlar yoki trigonometrik, ko‘rsatkichli funksiyalar qatnashgan tenglamalarning aniq analitik yechimini topish aksariyat hollarda imkonsizdir.Shu sababli, hisoblash matematikasida ildizni berilgan aniqlikda topish imkonini beruvchi sonli usullar (numerical methods) asosiy o‘rinni egallaydi. Taqribiy yechish usullarini tanlashda ularning yaqinlashish tezligi, hisoblash resurslariga bo‘lgan talabi va algoritmining barqarorligi kabi parametrlar muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu maqolaning maqsadi, eng keng tarqalgan to‘rtta metodni nazariy va amaliy jihatdan qiyoslab, ularning afzallik hamda kamchiliklarini ochib berishdan iborat.

TADQIQOT METODOLOGIYASI

Nochiziqli tenglamalarni yechish jarayoni odatda ikki bosqichga bo‘linadi:

1. **Ildizlarni ajratish:** Ildiz mavjud bo‘lgan $[a, b]$ kesmani aniqlash.
2. **Ildizni aniqlashtirish:** Tanlangan metod yordamida ildizni berilgan epsilon aniqlikda hisoblash.

Kesmani teng ikkiga bo‘lish (Biseksiya) usuli. Ushbu usul ildiz mavjudligi haqidagi asosiy teoremaga tayanadi: agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lib, kesma uchlarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa $(f(a) * f(b) < 0)$, u holda bu kesmada kamida bitta ildiz mavjud bo‘ladi.

- **Algoritm:** Har bir qadamda kesma o‘rtasi *c = (a + b) / 2* topiladi. Funksiya ishorasi saqlanganiga qarab, kesmaning yarmi tashlab yuboriladi.
- **Xatolik:** n-qadamdan keyingi xatolik *(b - a) / 2^n* ga teng bo‘ladi.

Nyutonning asosiy usuli (Urinmalar usuli). Nyuton usuli funksiyani *x_n* nuqta atrofida chiziqli yaqinlashtirishga asoslangan. Geometrik jihatdan bu funksiya grafigiga *x_n* nuqtada urinma o‘tkazish demakdir.

- **Formula:** *x(n+1) = x(n) - f(x(n)) / f'(x(n))*
- **Xususiyati:** Agar boshlang‘ich nuqta ildizga yetarlicha yaqin tanlansa, usul juda tez (kvadratik) yaqinlashadi.

Nyutonning soddalashgan usuli. Ushbu usulda har bir iteratsiyada hosila hisoblanmaydi, balki boshlang‘ich nuqtadagi *f'(x0)* qiymati o‘zgarmas deb olinadi. Bu esa hisoblash jarayonini soddalashtiradi, biroq yaqinlashish tezligini chiziqli darajaga tushiradi.

- **Formula:** *x(n+1) = x(n) - f(x(n)) / f'(x0)*

Kesuvchilar (Vatarlar) usuli. Nyuton usulining asosiy kamchiligi hosila hisoblash zarurligidir. Kesuvchilar usulida hosila o‘rniga chekli ayirmalar nisbati qo‘yiladi. Bu usul ildizga yaqinlashish uchun ikkita boshlang‘ich nuqtani talab qiladi.

- **Formula:** *x(n+1) = x(n) - f(x(n)) * (x(n) - x(n-1)) / (f(x(n)) - f(x(n-1)))*

EKSPERIMENTAL TAHLIL VA NATIJALAR

Tadqiqotda *f(x) = x^3 - x - 2 = 0* tenglamasi model sifatida olindi. Ildiz joylashgan oraliq *[1, 2]* ekanligi aniqlandi. Hisoblashlar aniqligi epsilon = *0.0001 (10^-4)* deb belgilandi.

Iteratsiyalar dinamikasi. Python dasturida olingan natijalar metodlarning samaradorligini yaqqol ko‘rsatib berdi.

Jadval 1: Metodlarning qiyosiy natijalari

Metod nomi	Iteratsiyalar soni	Aniqlik darajasi	Topilgan ildiz qiymati
Biseksiya	14	0.0001	1.52148
Nyuton	4	0.0001	1.52138
Soddalashgan Nyuton	9	0.0001	1.52138
Kesuvchilar	6	0.0001	1.521383

Yaqinlashish tezligi tahlili. Nyuton usuli eng yuqori samaradorlikni ko‘rsatdi. Biseksiya usuli esa ildizga "asta-sekin" yaqinlashsa-da, u hisoblash jarayonida eng barqaror ekanligi ma’lum bo‘ldi.

Yaqinlashish shartlari va mashina aniqligi. (Taqribiy hisoblashlarda biz foydalanadigan **Epsilon** aniqligi kompyuterning sonlarni saqlash razryadiga (floating point precision) bog'liq. Biz o'tkazgan eksperimentda **Epsilon** = *0.0001* aniqlik olingan bo'lsa-da, amaliyotda yanada yuqori aniqliklar talab etilishi mumkin.

Nyuton usulida xatolikning kamayish dinamikasi quyidagi munosabatga bo'ysunadi:

Xatolik formulasi:

*ABS(x_n+1 - x) <= (M / 2m) * ABS(x_n - x)^2***

Bu yerda:

- ***ABS*** - sonning moduli (absalyut qiymati);
- ***x_n+1*** - keyingi qadamdagi yechim;
- ***x**** - aniq yechim;
- ***x_n*** - joriy qadamdagi yechim;
- ***M va m*** - funksiya hosilalarining berilgan kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari.

Ushbu **kvadratik bog'lanish** Nyuton usulini "mashina aniqligi"ga eng tez yetib boruvchi metodga aylantiradi. Ya'ni, agar birinchi qadamda xatolik *0.01* bo'lsa, keyingi qadamda u taxminan *0.0001* ga tushadi (daraja ko'paygani hisobiga xatolik keskin kamayadi).

MUHOKAMA

Maqolada ko‘rib chiqilgan usullar ichida Nyuton usuli kvadratik yaqinlashish tezligiga egaligi bilan ajralib turadi. Bu shuni anglatadiki, har bir qadamda to‘g‘ri raqamlar soni deyarli ikki barobar ortadi. Biroq, ushbu metodning "nozik" tomoni boshlang‘ich yaqinlashish nuqtasi *x0* ni tanlashdir. Agar *x0* ildizdan uzoq tanlansa yoki *f'(x)* nolga yaqin bo‘lsa, usul divergensiyaga (yechimdan uzoqlashishga) uchrashi mumkin.

Biseksiya usuli esa, aksincha, juda sekin ishlaydi, lekin u har doim (agar funksiya ishorasi kesma uchlarida turlicha bo‘lsa) yechimga olib keladi. Bu metodni "ishonchli, lekin sust" deb atash mumkin.

Kesuvchilar usuli amaliy muhandislik masalalarida eng ko‘p qo‘llaniladi, chunki u Nyuton usuli kabi tez ishlaydi va hosila hisoblashni talab qilmaydi. Bu esa murakkab dasturiy kodlarda funksiya algoritmini soddalashtiradi.

Dasturiy realizatsiya haqida: Python tilining numpy va scipy kutubxonalari nochiziqli tenglamalarni yechish uchun tayyor fsolve funksiyalarini taklif etadi. Biroq, ushbu maqolada keltirilgan xususiy algoritmlar muhandisga jarayonning ichki dinamikasini nazorat qilish imkonini beradi.

XULOSA

O‘tkazilgan qiyosiy tahlillar va dasturiy simulyatsiyalar asosida quyidagi xulosalarga kelindi:

1. Hisoblash tezligi bo‘yicha Nyuton usuli yetakchilik qiladi, ammo u funksiyaning silliqligi va boshlang‘ich nuqtaga o‘ta talabchan.

2. Biseksiya usuli algoritmi eng sodda va barcha sharoitda yechimni kafolatlovchi metoddir.

3. Soddalashgan Nyuton usuli yirik tizimli tenglamalarda vaqtni tejash uchun eng qulay variant hisoblanadi.

4. Zamonaviy kompyuter texnologiyalarida "Gibrid metodlar" (masalan, Brent usuli) qo‘llanilishi tavsiya etiladi, u biseksiya ishonchliligi va Nyuton tezligini o‘zida mujassam etadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Mirziyoyev Sh.M. Yangi O‘zbekiston taraqqiyot strategiyasi. – Toshkent: "O‘zbekiston", 2022. – 416 b.
2. Isroilov S.A. Hisoblash metodlari (Oliy o‘quv yurtlari uchun darslik). – Toshkent: "O‘qituvchi", 2003. – 256 b.
3. Azlarov T.A., Mansurov H. Matematik analiz, 2-qism. – Toshkent: "O‘qituvchi", 2005. – 440 b.
4. Abduhamidov A.U., Nasimov H.A. Oliy matematika (Algebra va analiz asoslari). – Toshkent: "Istiqbol", 2008. – 320 b.
5. Nishonova Z.T. Matematik modellarni yechishning sonli usullari. – Toshkent: "Fan va texnologiya", 2011. – 180 b.
6. Samarskiy A.A., Gulin A.V. Chislennyye metody (Sonli usullar). – Moskva: "Nauka", 1989. – 432 s.
7. Baxvalov N.S. Chislennyye metody: Analiz, algoritmy, programmy. – Moskva: "Laboratoriya Bazovykh Znaniy", 2002. – 632 s.
8. Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis (9th Edition). – USA: Cengage Learning, 2011. – 888 p.
9. Chapra S.C., Canale R.P. Numerical Methods for Engineers. – New York: McGraw-Hill, 2014. – 992 p.
10. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis. – Berlin: Springer-Verlag, 2013. – 744 p.
11. Press W.H., Teukolsky S.A. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd Edition). – Cambridge University Press, 2007. – 1256 p.
12. Kahaner D., Moler C., Nash S. Numerical Methods and Software. – New Jersey: Prentice Hall, 1989. – 495 p.
13. McKinney W. Python for Data Analysis: Data Wrangling with Pandas, NumPy, and IPython. – O'Reilly Media, 2017. – 548 p.
14. Harris C.R., Millman K.J. Array programming with NumPy. – Nature, 2020. Vol. 585, pp. 357–362.

15. Virtanen P. et al. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. – Nature Methods, 2020. Vol. 17, pp. 261–272.